

Calculs de Présentations de Groupes Fuchsien via les Graphes Rubanés

Michel Imbert

Institut Fourier, B.P. 74, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France

Abstract. We show how to compute a geometrical presentation for a finitely generated fuchsian group G from the explicit knowledge of a fundamental polygon for G . We use a previous work on fat-graphs [4]. In particular, our result is a complement to the works of R.S. Kulkarni [10] and S. Johansson [5] on arithmetic fuchsian groups.

Introduction

Ces dernières années, le concept de graphe rubané (en anglais : fat-graph, ribbon graph, map) est apparu déterminant dans l'étude géométrique des espaces de modules de surfaces de Riemann pointées, notamment dans des calculs cohomologiques (travaux de M. Kontsevich, R. Penner, C. Itzykson, voir le survey [1] et les références qui y sont citées).

A un degré moindre de complexité, les graphes rubanés permettent déjà d'enrichir nos capacités calculatoires en topologie et géométrie des surfaces de Riemann. Ainsi, dans cet article, le fait de voir un polygone fondamental d'un groupe Fuchsien comme un graphe rubané, fournit le calcul d'une présentation géométrique du groupe Fuchsien à partir de la donnée explicite du polygone fondamental.

Certains groupes Fuchsien, dits arithmétiques, sont définis algébriquement. Les travaux respectifs de R.S. Kulkarni [10] et S. Johansson [5] permettent de calculer un polygone fondamental pour les sous groupes Fuchsien du groupe modulaire $PSL_2(\mathbb{Z})$, respectivement pour les groupes Fuchsien construits dans des algèbres de quaternions à division. Nous pouvons alors calculer une présentation géométrique de ces groupes Fuchsien arithmétiques. Il apparaît intéressant de chercher quel peut être l'apport de

E-mail address: Michel.Imbert@ujf-grenoble.fr

ce résultat dans la théorie des formes modulaires.

Dans la section suivante, nous rappelons les liens unissant polygones fondamentaux et présentations de groupes Fuchsien, puis énonçons notre résultat principal (théorème 1.2) et un corollaire. Nous en donnons une brève interprétation en terme de l'espace de Teichmüller d'un groupe Fuchsien. La section 3. constitue une courte introduction aux graphes rubanés, nous n'énonçons que les résultats nécessaires à la cohérence du texte. La section 4. contient la démonstration du théorème 1.2 et de son corollaire. Nous appliquons le résultat dans la section 5. à des groupes Fuchsien arithmétiques.

Je remercie R. Silhol pour son accueil chaleureux et des discussions instructives.

1 Polygones fondamentaux et présentations des groupes Fuchsien

Nos références sur les groupes Fuchsien sont [2] et [7]. Le livre [7] est le plus élémentaire, l'article [2], également facile d'accès, est le plus complet pour notre propos.

Soit G un groupe Fuchsien agissant sur le demi-plan de Poincaré \mathcal{H} , c'est à dire un sous groupe discret de $PSL_2(\mathbb{R})$. Nous ne considérons dans cet article que des groupes Fuchsien de type fini.

Le quotient \mathcal{H}/G est une surface de Riemann orbifold : elle possède éventuellement un nombre fini de points dits singuliers ou elliptiques, qui possèdent un voisinage biholomorphe à un disque du plan complexe quotienté par l'action d'un groupe cyclique. L'ordre du point elliptique est le cardinal du groupe cyclique.

Cette surface n'est pas nécessairement compacte, il peut lui manquer des piqures (des points avec voisinages biholomorphes à des disques pointés), et des trous (des disques avec des voisinages biholomorphes à des cylindres).

La signature topologique du groupe G est $(g, \nu_1, \dots, \nu_s, v)$ si la surface

de Riemann quotient est de genre g , possède s points elliptiques d'ordres (ν_1, \dots, ν_s) , et v composantes de bord. La signature géométrique du groupe G est $(g, \nu_1, \dots, \nu_s, u, t)$ si parmi les composantes de bord, il se trouve u piqures et t trous.

Définition 1.1 *Un polygone fondamental pour un groupe Fuchsien G est un polygone connexe P dans $\mathcal{H} \cup \mathbb{R}$ dont le bord est formé de géodésiques du demi-plan et de segments de la droite réelle tel que :*

1. *Les itérés de P par G remplissent \mathcal{H} .*
2. *L'intérieur de P ne rencontre aucune de ses images par G .*
3. *Pour toute arête (ou coté) géodésique s de P , il existe une autre arête \bar{s} de P et $g \in G$ tel que $g(s) = \bar{s}$, et $g(P)$ est un polygone adjacent à P le long de \bar{s} .*

Les arêtes qui sont des segments de la droite réelle seront appelées arêtes réelles. Les éléments du groupe g tels que $g(s) = \bar{s}$ sont appelés les appariements de cotés. Ils engendrent le groupe G (proposition 1.2.2 de [2], théorème 3.5.4 de [7]).

Tout groupe Fuchsien de type fini admet un polygone fondamental avec un nombre fini de cotés et de sommets (théorème 1.5.3 de [2], §3 de [7], un domaine de Dirichlet convient).

Les G -orbites de sommets avec des stabilisateurs non triviaux (appelés cycles elliptiques dans [7]) donnent les points elliptiques de \mathcal{H}/G . Les G -orbites de sommets dans \mathbb{R} donnent les piqures. Les G -orbites d'arêtes réelles donnent les trous.

Si S est le nombre d'orbites de sommets, A est le nombre d'orbites d'arêtes qui sont géodésiques, et u est le nombre d'orbites d'arêtes réelles, alors le genre g est donné par la formule d'Euler $2 - 2g = A - S - 1 - u$.

La signature géométrique se lit donc sur un polygone fondamental. Mieux, la théorie des revêtements assure que le groupe G est isomorphe au quotient du groupe fondamental de la surface quotient privée des points elliptiques $(E_i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$ par le plus petit sous groupe distingué contenant $(\delta_1^{\nu_1}, \dots, \delta_s^{\nu_s})$, où δ_i est un petit lacet orienté autour de E_i . Ainsi (théorème

1.5.1 de [2]), le groupe Fuchsien G possède une présentation, que nous appelons géométrique :

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, e_1, \dots, e_s, p_1, \dots, p_t, h_1, \dots, h_u \\ \prod_{k=1}^g [a_k, b_k] \prod_{j=1}^s e_j \prod_{i=1}^t p_i \prod_{f=1}^u h_f = 1 \text{ et } e_j^{\nu_j} = 1 \rangle .$$

Les éléments a_k et b_k sont hyperboliques, les e_j elliptiques, les p_i paraboliques, et les h_f hyperboliques.

Notre résultat principal constitue l'analogie calculatoire de cette discussion.

Théorème 1.2 *Soit G un groupe Fuchsien de type fini. Alors la connaissance explicite d'un polygone fondamental et de ses appariements de cotés permet de calculer explicitement une présentation géométrique de G .*

Il faut noter que réciproquement, la connaissance d'une présentation géométrique d'un groupe Fuchsien permet [3] [8] d'en dessiner un polygone fondamental et de calculer ses appariements d'arêtes. Cela conduit [3] [9] à des résultats importants dans la théorie des espaces de Teichmüller.

Une première interprétation de notre résultat dans la théorie des espaces de Teichmüller est la suivante. Rappelons quelques définitions [9] [3]. L'espace de Teichmüller $T(G)$ du groupe Fuchsien G est constitué des classes de conjugaison de présentations géométriques de G . L'espace des modules $M(G)$ est constitué des classes de conjugaison de groupes Fuchiens isomorphes à G (où un isomorphisme doit préserver le type des éléments du groupe, c'est à dire leur caractère hyperbolique, parabolique ou elliptique). L'espace des modules est le quotient de l'espace de Teichmüller par l'action transitive de $\text{Out}_t(G)$, le groupe des automorphismes extérieurs de G préservant le type des éléments de G . La connaissance pour G d'un polygone fondamental permet donc de connaître sa fibre dans son espace de Teichmüller.

En corollaire du théorème, nous obtenons :

Corollaire 1.3 *Soit G un groupe Fuchsien de type fini donné avec un polygone fondamental ou une présentation géométrique. Soit $\phi : G \rightarrow H$ un homomorphisme surjectif sur un groupe fini. Alors il est possible de calculer une présentation géométrique pour le groupe Fuchsien $\ker(\phi)$.*

2 Graphes rubanés

Rappelons [11] qu'un graphe fini Γ est la donnée de deux ensembles finis A et S munis d'une bijection involutive sans point fixe σ_1 de A et d'une application $\Phi : A \rightarrow S \times S$, avec $\Phi(a)$ noté $(a(0), a(1))$, tel que $\sigma_1(a)(1) = a(0)$.

Supposons que l'on ait un plongement $i : |\Gamma| \hookrightarrow S$ de la réalisation topologique $|\Gamma|$ d'un graphe Γ dans une surface orientable lisse S . Soit s un sommet de Γ , et $St(s)$ l'ensemble $(e_1, \dots, e_{v(s)})$ des éléments e de A tel que $e(1) = s$ (le cardinal $v(s)$ de $St(s)$ s'appelle la valence du sommet). En projetant un voisinage de $i(|s|)$ sur le plan tangent $T_{|s|}(S)$ muni de son orientation, on obtient un ordre cyclique sur les éléments de $St(s)$. Considérant l'ensemble des sommets, on obtient une bijection σ_0 de A dont les orbites sont données par l'ordre cyclique sur chaque sommet : $\sigma_0(e_i) = e_{i+1}$ pour l'indice i variant dans $\mathbb{Z}/v(s)$.

Il est clair qu'un difféomorphisme préservant l'orientation de S va fournir une autre réalisation topologique de Γ dans S avec le même ordre cyclique autour de chaque sommet.

Cela conduit à la définition suivante [6] [1].

Définition 2.1 *Un graphe rubané (fini) Γ est un ensemble (fini) A muni de deux bijections σ_0 et σ_1 , σ_1 étant une involution sans point fixe. Les éléments de A sont appelés des arêtes orientées.*

Les arêtes géométriques sont les orbites de σ_1 , les sommets sont celles de σ_0 . On notera souvent $\sigma_1(a) = \bar{a}$. Un graphe rubané est un graphe : l'application Φ est définie par : $a(0)$ est la σ_0 -orbite de \bar{a} , $a(1)$ est la σ_0 -orbite de a . Tous nos graphes rubanés seront supposés connexes.

On définit la bijection $\sigma_2 = \sigma_1 \circ \sigma_0^{-1}$. Ses orbites sont appelées des faces. Chaque face $(a, \sigma_2(a), \dots, \sigma_2^{v-1}(a))$ est un lacet d'arêtes orientées. En effet,

soit $k \in \mathbb{Z}/v$; en écrivant $\sigma_2^k = \sigma_2^{k-1}\sigma_1\sigma_0^{-1}$, et comme $\sigma_1\sigma_0^{-1}(a)(0) = a(1)$, on obtient : $\sigma_2^k(a)(0) = \sigma_2^{k-1}(a)(1)$.

Un morphisme $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ entre deux graphes rubanés est une application $f : A(\Gamma) \rightarrow A(\Gamma')$ qui satisfait à $f \circ \sigma_i = \sigma'_i \circ f$ pour $i \in \{0,1,2\}$. Si f est bijective, alors f est un isomorphisme.

Si $s(\Gamma)$, $a(\Gamma)$, $f(\Gamma)$ sont respectivement le nombre de sommets, arêtes géométriques et faces du graphe rubané Γ , alors son genre g est défini par la formule d'Euler :

$$2 - 2g(\Gamma) = s(\Gamma) - a(\Gamma) + f(\Gamma) .$$

Lorsque les graphes rubanés n'ont qu'une seule face, on les représente volontiers comme un polygone avec identifications de cotés (c'est le cas des polygones fondamentaux des surfaces compactes orientables). Sinon, on les dessine agréablement en remplaçant les arêtes par des rubans dont les bords représentent les arêtes orientées, comme dans l'exemple qui suit. Le graphe sous-jacent apparaît alors sur le dessin comme squelette du graphe rubané. Comme exemple, on définit deux graphes rubanés Δ et Γ non isomorphes, mais avec des graphes sous-jacents isomorphes : soit $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$,

$$\sigma_0(\varepsilon) = (abcdefgh), \sigma_1(\varepsilon) = (ae)(bd)(cg)(fh), \sigma_2(\varepsilon) = (af)(be)(cdgh)$$

$$\sigma_0(\Gamma) = (abcdefgh), \sigma_1(\Gamma) = (ae)(bf)(cg)(dh), \sigma_2(\Gamma) = (adgbehcf) .$$

Ils sont représentés sur la figure 1.

Puisque un graphe rubané Γ est en particulier un graphe, la structure de son groupe fondamental $\pi_1(\Gamma, s)$ est connue. Rappelons [11] que le groupe fondamental d'un graphe est le groupe des classes d'homotopie de lacets d'arêtes orientées basés en un sommet s , avec la loi de succession des chemins, et où l'homotopie consiste à enlever ou ajouter une arête orientée a suivie de l'arête d'orientation opposée $\sigma_1(a) = \bar{a}$. C'est un groupe libre en $a(\Gamma) - s(\Gamma) + 1$ générateurs [11].

Cependant, si l'on voit Γ comme réunion disjointe de $f(\Gamma)$ polygones orientés réalisés dans le plan orienté (la donnée de σ_2) avec une identification par paires d'arêtes d'orientations opposées (la donnée de σ_1), et que l'on remplit ces polygones par des disques privés d'un point, on réalise Γ comme

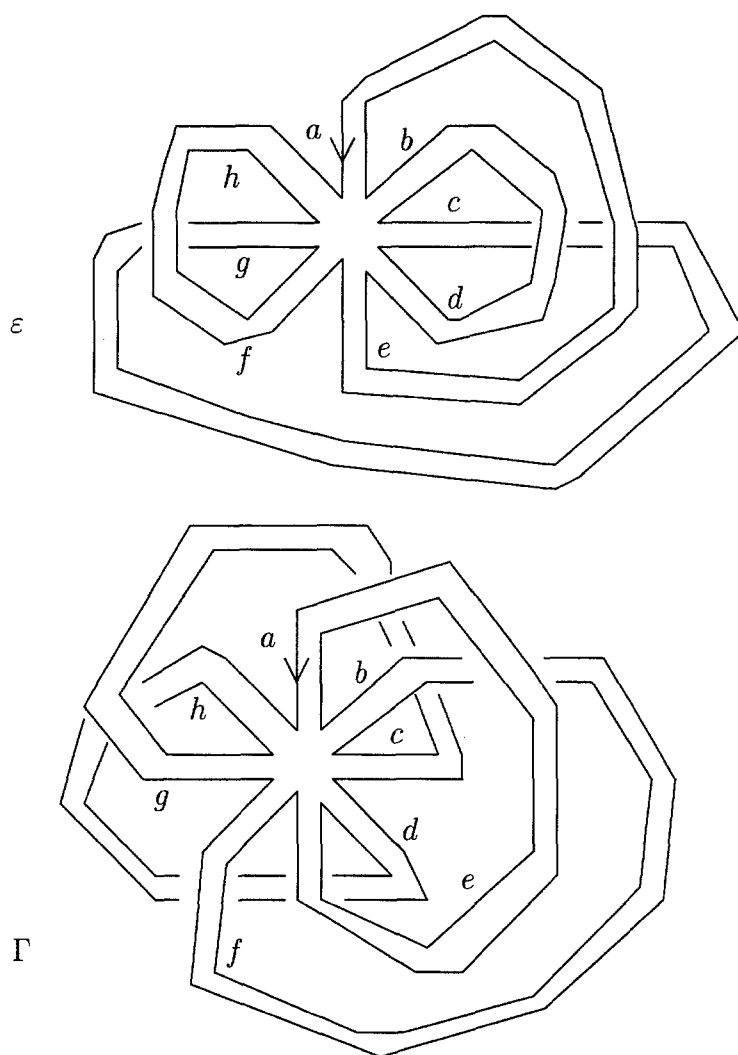


FIG. 1 – Graphes rubanés non isomorphes.

un rétracte par déformation d'une surface orientable compacte $F(\Gamma)$ privée de $f(\Gamma)$ points. Le genre du graphe rubané définit celui de la surface $F(\Gamma)$. Dans l'exemple ci-dessus, on obtient un tore privé de trois points pour ε , et un bitore privé d'un point pour Γ .

Finalement, le groupe fondamental $\pi_1(\Gamma)$, isomorphe au premier groupe d'homotopie $\pi_1(|\Gamma|)$, est donc isomorphe au premier groupe d'homotopie de la surface $\pi_1(F(\Gamma))$, et possède une présentation dite topologique.

Dans l'article [4], il est montré comment calculer explicitement une telle présentation topologique du groupe fondamental $\pi_1(\Gamma)$ à partir de la définition 2.1. Rappelons l'énoncé du résultat.

Soit (a_1, \dots, a_l) une face du graphe épais de valence l , les arêtes orientées étant écrites dans l'ordre imposé par σ_2 . On joint $a_1(0)$ au sommet de base par un chemin orienté α , et on considère dans $\pi_1(\Gamma)$ la classe d'homotopie du lacet orienté $\gamma = \alpha a_1 \dots a_l \bar{\alpha}$. Un autre choix de α conduit à un élément conjugué de γ . Si la face est décrite cycliquement à partir de a_i avec $i > 1$, alors on obtient la classe d'homotopie d'un lacet orienté $\beta a_i \dots a_{i-1} \bar{\beta}$, homotope à $\beta a_i \dots a_l a_1 \dots a_{i-1} a_i \dots a_l \bar{a}_l \dots \bar{a}_i \bar{\beta}$ qui est conjugué à γ . On peut donc associer à chaque face de Γ une classe de conjugaison d'élément de $\pi_1(\Gamma)$. Nous nommerons cycle facial tout élément de la classe de conjugaison du lacet orienté associé à chaque face.

Théorème 2.2 *Soit Γ un graphe rubané de genre g , avec n faces. Il existe un algorithme combinatoire pour trouver des cycles faciaux C_1, \dots, C_n et $2g$ autres lacets orientés $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$, qui engendrent $\pi_1(\Gamma)$, et qui sont soumis à la seule relation de surface :*

$$[A_1, B_1] \dots [A_g, B_g] C_1 \dots C_n = 1 .$$

Par algorithme combinatoire, on entend une succession finie d'opérations combinatoires portant sur le graphe rubané et son groupe fondamental.

Pour conclure cette section, nous rappelons la dernière notion qui nous sera utile : celle de dualité.

Définition 2.3 *Soit Γ un graphe rubané décrit par $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)$. Alors le graphe rubané dual Γ^* est défini par $A^* = A$, $\sigma_0^* = \sigma_2$, $\sigma_1^* = \sigma_1$.*

Il faut noter que $\sigma_2^* = \sigma_1 \sigma_0 \sigma_1$, $g(\Gamma^*) = g(\Gamma)$.

3 Preuve du théorème

Soit donc G un sous groupe Fuchsien de $PSL_2(\mathbb{R})$. Dans un premier temps, on part avec un polygone fondamental P pour G avec $2a$ cotés, dans le demi-plan de Poincaré \mathcal{H} (sans arêtes réelles).

Soit s_1, \dots, s_{2a} l'ensemble des arêtes successives de P dans l'ordre donné par l'orientation naturelle de \mathcal{H} . Pour tout i , il existe $j(i) \neq i$ et $g_i \in G$ tel que $g_i(s_i) = s_{j(i)}$. On note $s_{j(i)} = \overline{s_i}$. On a automatiquement $g_{j(i)} = g_i^{-1}$.

Soit Δ le graphe rubané défini par $\sigma_2 = (s_1, \dots, s_{2a})$, $\sigma_1(s_i) = \overline{s_i}$.

Si on considère le pavage de \mathcal{H} obtenu par les itérés de P par G , alors sa projection sur la surface de Riemann orbifold quotient $S = \mathcal{H}/G$ est une réalisation topologique de Δ sur S .

Le graphe rubané Δ possède a arêtes géométriques, une face, et w sommets si w est le nombre de cycles disjoints de σ_0 . Les sommets sont matérialisés sur S par des piqures, des points elliptiques, ou des points lisses.

Considérons le graphe rubané Δ^* , qui possède donc un seul sommet, a arêtes géométriques qui sont des boucles, et w faces. On notera s_i^* l'arête orientée de Δ^* provenant de l'arête orientée s_i de Δ . Topologiquement, l'orientation de $|s_i^*|$ est définie telle que $(|s_i|, |s_i^*|)$ forment un repère direct en leur unique point d'intersection.

Notons (V_1, \dots, V_s) l'ensemble des sommets de Δ qui correspondent aux points elliptiques, $(V_{s+1}, \dots, V_{s+t})$, ceux qui correspondent aux piqures, et (V_{s+t+1}, \dots, V_w) les autres, qui correspondent à des points lisses. Soit Q l'unique sommet de Δ^* .

Le résultat découle alors des deux points clés suivants.

Premièrement, par le théorème 2.2, on peut calculer une présentation topologique de $\pi_1(\Delta^*, Q)$:

$$\langle (a_i, b_i)_{i \in \{1, \dots, g\}}, (\gamma_j)_{j \in \{1, \dots, w\}} / \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^w \gamma_j = 1 \rangle.$$

Deuxièmement, on construit un homomorphisme surjectif de groupes :

$$\psi : \pi_1(\Delta^*, Q) \longrightarrow G .$$

A un lacet d'arêtes orientées $\gamma = s_1^* \cdots s_n^*$, on associe $g_1 \cdots g_n$, où $g_i(s_i) = \overline{s_i}$ et $g_1 g_2$ signifie $g_2 \circ g_1$. C'est bien défini puisqu'à $\overline{s_i}^*$ est associé g_i^{-1} . La surjectivité provient du fait que G est engendré par les appariements, et $\psi(s_i^*) = g_i$ (chaque arête orientée s_i^* est une boucle, c'est donc un lacet de $\pi_1(\Delta^*, Q)$).

On vérifie maintenant que les lacets $(\gamma_i^{\nu_i})_{i \in \{1, \dots, s\}}$ et $(\gamma_j)_{j \in \{s+t+1, \dots, w\}}$ sont bien dans le noyau du morphisme ψ .

Soit donc un cycle facial γ_k venant d'une face F_k de Δ^* , c'est à dire d'un sommet V_k de Δ , ou encore d'une orbite O_k de sommets du polygone P . Alors $\psi(\gamma_k)$ stabilise un sommet de O_k .

Par construction, si $F_k = (s_1^*, \dots, s_v^*)$ comme orbite de σ_2^* , alors $\psi(\gamma_k)$ est conjugué à $g_1 \cdots g_v$. Supposons sans perte de généralités qu'il lui soit égal. Puisque $\sigma_2^* = \sigma_1 \sigma_0 \sigma_1$, l'ensemble $\{s_1, \dots, s_v\}$ décrit les arêtes orientées de Δ dont l'origine est V_k , ou les arêtes orientées s_i du polygone dont les origines P_i constituent l'orbite O_k . Comme $g_i(s_i) = \overline{s_i}$, l'image de P_i par g_i est le sommet terminal $\overline{s_i}(1)$ de $\overline{s_i}$.

Maintenant, $\sigma_2^*(s_{i-1}^*) = s_i^*$ (par définition) entraîne $\sigma_1 \sigma_0 \sigma_1(s_{i-1}) = s_i$, soit $\sigma_2^{-1}(s_{i-1}) = \overline{s_i}$. Pour terminer, $g_i(P_i)$ est égal à $\overline{s_i}(1) = s_{i-1}(0)$, c'est à dire P_{i-1} . Par suite, $\psi(\gamma_k)(P_1) = P_1$.

On en déduit que $\psi(\gamma_k)$ est elliptique si O_k est contenue dans le demi-plan (pour $k \in \{1, \dots, s\}$), parabolique si O_k est incluse dans la droite réelle ($k \in \{s+1, \dots, s+t\}$), et l'identité si $k \in \{s+t+1, \dots, w\}$. En corollaire, les lacets $(\gamma_i^{\nu_i})_{i \in \{1, \dots, s\}}$ et $(\gamma_j)_{j \in \{s+t+1, \dots, w\}}$ appartiennent au noyau de ψ .

Ainsi, la présentation topologique de $\pi_1(\Delta^*)$ fournit, via l'homomorphisme surjectif ψ , la présentation géométrique désirée du groupe G .

Remarque: pour démontrer directement (sans passer par la surface) que $\ker(\psi)$ est le plus petit sous groupe distingué contenant les lacets $(\gamma_i^{\nu_i})_{i \in \{1, \dots, s\}}$ et $(\gamma_j)_{j \in \{s+t+1, \dots, w\}}$, il faudrait utiliser le revêtement universel du graphe rubané Δ (qui est un arbre rubané infini). La théorie des revête-

ments de surfaces est en fait entièrement codée par celle des revêtements de graphes rubanés, mais nous n'abordons pas ce sujet ici.

Pour conclure la preuve, il nous reste à traiter le cas où P possède des arêtes qui sont des segments de la droite réelle. Soit (s_1, \dots, s_{2a}) les arêtes qui sont géodésiques. Alors on considère le même graphe rubané que dans le premier cas, défini par $\sigma_2 = (s_1, \dots, s_{2a})$, $\sigma_1(s_i) = \overline{s_i}$. Les arêtes réelles sont vues comme des sommets. Le graphe rubané dual Δ^* possède lui un sommet, a arêtes, et $w + u$ faces si w est le nombre d'orbites de sommets et u est le nombre d'orbites d'arêtes réelles. Par le même procédé on obtient la présentation du groupe. Reste à vérifier l'hyperbolicité des nouveaux éléments de G qui correspondent aux nouvelles faces de Δ^* .

Une orbite d'arêtes réelles se projette sur une courbe frontière de \mathcal{H}/G . La face de Δ^* correspondante à une telle orbite fournit un cycle facial γ qui se réalise comme une courbe librement homotope à la courbe frontière. Par le même argument que précédemment, $\psi(\gamma)$ stabilise une arête réelle (un segment de la droite réelle), il est donc nécessairement hyperbolique. \square

Preuve du corollaire 1.3 :

On doit trouver un polygone fondamental pour $\ker(\phi)$ à partir d'un polygone fondamental P de G . C'est une procédure bien connue, mais nous donnons quelques détails, et les références adéquates.

Soit $(\gamma_i, \gamma_i^{-1})_{i \in I}$ l'ensemble des appariements de P , et $h_i = \phi(\gamma_i)$. Tout élément h de H s'écrit $h = \prod_{j \in J \subset I} h_j^{\pm 1}$. Considérons $\gamma_h = \prod_{j \in J \subset I} \gamma_j^{\pm 1}$. Alors $P_\phi = \bigcup_{h \in G} \gamma_h(P)$ est un polygone fondamental pour $\ker(\phi)$. Les propriétés 1. et 2. de la définition 1.1 sont clairement satisfaites (voir le théorème 3.1.2 et sa preuve dans [7] pour des détails). On doit alors démontrer que P_ϕ est un polygone, c'est à dire sa frontière est une courbe simple. C'est fait dans [12] §7.2, en utilisant un théorème de Jordan et la discontinuité de l'action de G sur le demi-plan. Le calcul des appariements de P_ϕ se fait à partir de la remarque suivante : pour chaque coté s de P_ϕ , il existe un unique coté t de P et $h \in H$ tel que $s = \gamma_h(t)$. \square

4 Application aux groupes Fuchsien arithmétiques

Les groupes Fuchsien arithmétiques sont les groupes Fuchsien commensurables avec ceux qui sont obtenus à partir d'ordres dans des algèbres de quaternions. Les algèbres de quaternions en question doivent être définies sur un corps totalement réel, et obéir à une condition portant sur ses complétions réelles. Nous renvoyons le lecteur à [7] et [5] pour plus de détails. Le cas de l'algèbre $M_2(\mathbb{Q})$ conduit aux sous groupes Fuchsien de $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Dans [10], R.S. Kulkarni montre comment obtenir des polygones fondamentaux pour tous les sous groupes Fuchsien de $PSL_2(\mathbb{Z})$, avec un ensemble d'appariements qui forme un ensemble minimal de générateurs. Par ailleurs, cet ensemble de générateurs ne fournit pas en général une présentation géométrique du groupe, notre résultat permet alors d'en déduire une.

Dans [5], S. Johansson montre que pour les groupes Fuchsien arithmétiques Γ construits dans des algèbres de quaternions à division (cela exclut $M_2(\mathbb{Q})$), il est possible de dessiner un domaine fondamental de Ford (voir §3.3 de [7] pour la définition), qui est un polygone fondamental au sens de la définition 1.1, et de calculer les appariements d'arêtes. L'ensemble de générateurs obtenu n'est pas minimal en général.

Par le théorème 1.2, nous sommes capables de calculer une présentation géométrique pour tous ces groupes. Il s'avère [7] que ces groupes arithmétiques ont une signature topologique $(g, \nu_1, \dots, \nu_s, 0)$ (aucune composante de bord).

• Exemple 1 :

C'est un exemple cité dans [7], §5.6. Le groupe Fuchsien est engendré par quatre éléments : $\gamma_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & 3 \end{pmatrix}$, $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$,

$$\gamma_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 - 3\sqrt{3} & \sqrt{15} \\ -\sqrt{15} & 4 + 3\sqrt{3} \end{pmatrix}, \gamma_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 + 3\sqrt{3} & \sqrt{15} \\ -\sqrt{15} & 4 - 3\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

L'allure du polygone fondamental est esquissée sur la figure 2. Il est fait de cercles d'isométrie C_i de γ_i (voir [7]), et des cercles $\gamma_i(C_i)$, pour i allant de 1 à 4.

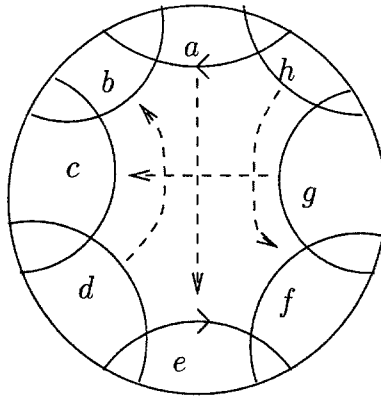


FIG. 2 – Un exemple en genre un.

L'appariement est donné par $\gamma_1(g) = c$, $\gamma_2(a) = e$, $\gamma_3(h) = f$, et $\gamma_4(d) = b$.

Le graphe rubané correspondant Δ est donné par $\sigma_2 = (abcdefgh)$ et $\sigma_1 = (ae)(cg)(bd)(fh)$. On en déduit $\sigma_0 = (ad)(bcfg)(eh)$. Alors $\sigma_0^* = \sigma_2$, $\sigma_1^* = \sigma_1$, et $\sigma_2^* = (af)(be)(cdgh)$. Le graphe rubané dual Δ^* est représenté sur la figure 1 sous le nom de ε .

Nous avons la présentation topologique suivante pour $\pi_1(\Delta^*)$:

$$\langle A_1 = g, B_1 = f, \delta_1 = fa, \delta_2 = eb, \delta_3 = dghc / [A_1, B_1] \delta_1 \delta_2 \delta_3 = \text{Id} \rangle$$

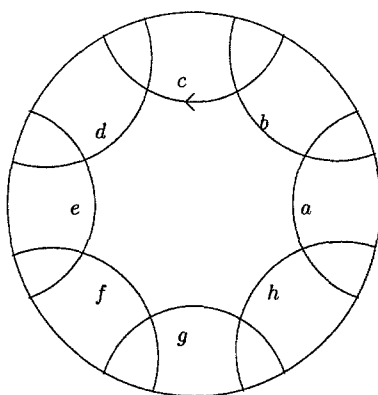
de laquelle nous déduisons une présentation géométrique pour le groupe Fuchsien :

$$\langle a_1 = \gamma_1, b_1 = \gamma_3^{-1}, d_1 = \gamma_3^{-1} \gamma_2, d_2 = \gamma_2^{-1} \gamma_4^{-1} / [a_1, b_1] d_1 d_2 = \text{Id} \rangle .$$

• Exemple 2 :

C'est un exemple donné dans [5], §5.7. Posons $t = \sqrt{2} - 1$. Alors le groupe Fuchsien est engendré par les quatre éléments suivants :

$$\begin{aligned} g_1 &= \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & -(2 + \sqrt{2})\sqrt{t} \\ -(2 + \sqrt{2})\sqrt{t} & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ g_2 &= \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} + (2 + \sqrt{2})\sqrt{t} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})\sqrt{t} \end{pmatrix} \\ g_3 &= \begin{pmatrix} (1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{t}) & -(1 + \sqrt{2})\sqrt{t} \\ -(1 + \sqrt{2})\sqrt{t} & (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{t}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

FIG. 3 – *Un exemple en genre deux.*

$$g_4 = \begin{pmatrix} (1 + \sqrt{2})\sqrt{t} & -(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{t}) \\ (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{t}) & -(1 + \sqrt{2})\sqrt{t} \end{pmatrix}.$$

Le polygone fondamental, représenté sur la figure 3, est un octogone régulier (les rayons des cercles d'isométrie sont tous égaux) avec identification par paires des cotés opposés. Précisemment, $g_1(a) = e$, $g_2(g) = c$, $g_3(h) = d$ et $g_4(b) = f$.

Le graphe rubané correspondant est donné par $\sigma_2 = (abcdefgh)$, $\sigma_1 = (ae)(bf)(cg)(dh)$, d'où nous déduisons $\sigma_2^* = (adgbehcf)$. Le graphe rubané Δ^* est représenté sur la figure 1 sous le nom de Γ . La présentation topologique du groupe fondamental de Δ^* (obtenue par application du théorème 1.2, voir l'exemple de la dernière section de [4]), donne la présentation géométrique de ce groupe Fuchsien cocompact de genre deux : $\langle A_1 = fca, B_1 = dgb, A_2 = c, B_2 = f, \delta = fcadgbehcf\bar{c}\bar{f} / [A_1, B_1][A_2, B_2] = \delta \rangle$ donne

$$\langle a_1 = g_4^{-1}g_2^{-1}g_1, b_1 = g_3^{-1}g_2g_4, a_2 = g_2^{-1}, b_2 = g_4^{-1} / [a_1, b_1][a_2, b_2] = \text{Id} \rangle.$$

Références

- [1] Bauer, M. et Itzykson, C.: *Triangulations*, The Grothendieck theory of dessins d'enfants, (L.Schneps ed), LMS, LNS **200**, Cambridge university press, (1995).

- [2] Greenberg, L. *Finiteness theorems for Fuchsian and Kleinian groups*, in Discrete groups and automorphic functions, (W.J. Harvey editor), Academic press, (1977).
- [3] Harvey, W.J. *Spaces of discrete groups*, in Discrete groups and automorphic functions, (W.J. Harvey editor), Academic press, (1977).
- [4] Imbert, M. *Fundamental groups of fat-graphs*, Note Di Matematica **19**, n.2, (1999), 257-268.
- [5] Johansson, S. *On fundamental domains of arithmetic Fuchsian groups*, Math. Comput. **69**, No.229, 339-349, (2000).
- [6] Jones, G.A. et Singerman, D. *Theory of maps on orientable surfaces*, Proc Lond Math Soc, Vol **37**, (1978), 273-307
- [7] Katok, S. *Fuchsian groups*, The university Chicago press, (1992).
- [8] Keen, L. *Canonical polygons for finitely generated Fuchsian groups*, Acta Math **115**, (1966), 1-16.
- [9] Keen, L. *Intrinsic moduli on Riemann surfaces*, Ann. of Math. **84**, (1966), 405-420.
- [10] Kulkarni, R.S. *An arithmetic geometric method in the study of the subgroups of the modular group*, Amer Jour of Math. **113**, (1991), 1053-1133.
- [11] Serre, J.P. *Arbres et amalgames*, Astérisque **47**, SMF, Paris, (1977).
- [12] Stillwell, J. *Geometry of surfaces*, Universitext. New York: Springer-Verlag, (1991).

Received: 29.11.2000

Revised: 01.03.2001